بسم الله الرحمن الرحيم

مراجعه على منهج الجبر رياضيات (١)

الدوال الحقيقية

أولا : تعيين المجال للدالة وهو كالاتى

(١) دوال كثيرات الحدود: الثابته والخطية والتربيعية والتكعيبية مجالها هو دائما ح مالم يذكر غير ذلك .

(٢) دالة الكسر الجبرى : اى دالة على الصورة د (س) = $\frac{ر(س)}{ق(س)}$ حيث ر(س) ، ق (س) دوال كثيرات حدود مجالها دائما هو ح ــ { أصفار المقام } .

(٣) الدالة التى على الصورة : (س) = $\sqrt{ر(س)}$ مجالها ر (س) ≤ صفر

(٤) الدوال المعرفة على قاعدتين أو أكثر : مجالها اتحاد فترات التعريف

ملاحظه هامة جدا قبل البدء فى رسم أى دالة يجب ذكر المجال

لتعيين **مدى أى دالة من الرسم** { من اقل نقطة إلى أعلى نقطة فى الرسم و ذلك على محور الصادات}

لتعيين **الإطراد** من الرسم { من أقصى اليسار إلى أقصى اليمين على محور السينات وملاحظة سلوك المنحنى من حيث التزايد او التناقص أو الثبوت و ذلك اذا كان يرتفع لاعلى فى فترة ما تكون الدالة تزايدية فى هذه الفترة و إذا كان ينخفض فى فترة أخرى فإن الدالة تناقصية على تلك الفترة و إذا كان المنحنى يوازى محور السينات فى فترة ما كانت الدالة ثابتة على تلك الفترة }.

لبحث نوع الدالة من الرسم من حيث كونها زوجية ام فردية ام غير ذلك

(١) إذا كان منحنى الدالة **متماثل** تماما حول محور **الصادات** كانت الدالة **زوجية**

(٢) إذا كان **التماثل** فى نقطة **الأصل** فإنها تكون **فردية**

(٣) فيما عدا ذلك تكون الدالة لا فردية و لا زوجية .

لبحث نوع الدالة من حيث كونها زوجية ام فردية او غير ذلك جبرياً نتبع الاتى

أولاً **: مراجعة المجال** إذا **كان فترة ليست متماثله** فإن الدالة **ليست فردية أو زوجية** حيث س أ، - س أى منهما لا ينتمى للمجال .

ثانيا : إذا كان **المجال فترة متماثلة** فإننا **نوجد د (ــ س)** و ذلك بالتعويض فى الدالة المعطاه

فإذا كان الناتج نفس الدالة بنفس الاشارة كانت الدالة زوجية **أى د (ــ س) = د (س)**

و إذا كان الناتج نفس الدالة بعكس الاشارة كانت الدالة فردية أى **د (ــ س) = ــ د (س)**

أما إذا كان الناتج غير ذلك مما سبق كانت الدالة لا فردية و لا زوجية .

Kamal taha 0123801200

ملاحظات هامة جداً على دالة **المقياس** يجب إتباع الاتى بكل دقة :

(١) **ترتيب المقياس** حيث |جـ ـ س| = |س ـ جـ|

(٢) **من الممكن أخذ عامل** مشترك من داخل المقياس |٢ س ـ ٦| = ٢|س ـ ٣| وذلك كمثال

(٣) أيضا يجب أن تلاحظ أن $\sqrt{\text{(اى مقدار)}^{٢}}$ = |المقدار|

(٤) |س^{٢}| = |س|^{٢} = س^{٢} (أى التربيع داخل المقياس = التربيع خارج المقياس = التربيع من غير مقياس)

(٥) **إعادة تعريف دالة المقياس** وذلك عند رسمها أو عند حل المعادلات .

(٦) إذا كان |س ـ جـ| ≤ أ حيث أ عدد حقيقى موجب فإن ـ أ ≤ س ـ جـ ≤ أ

(٧) إذا كان |س ـ جـ| ≤ أ حيث أ عدد حقيقى موجب فإن س ـ جـ ≤ أ ، س ـ جـ ≥ ـ أ

(٨) لحل أى معادلة بيانيا يتم الأتى (١) تمثيل كل طرف من طرفى المعادلة بيانيا كدالة مستقلة فى نفس الصفحة

(٢) الأحداثى السينى لنقط تقاطع المنحنين هو مجموعة حل المعادلة .

و إذا كانت المعادلة صفرية ترسم كلها كدالة واحدة و يكون مجموعة الحل هى الاحداثيات السينية فى نقط التقاطع مع محور السينات .

التمثيل البيانى لبعض الدوال

أولا الدالة الثابتة : د (س) = جـ مجالها هو ح و يمثلها مستيم يوازى محور السينات و يمر بالنقطه (٠ ، جـ) .

أما إذا كان المجال [أ ، ب] نعين النقطين (أ، جـ) ، (ب، جـ) و نصل بينهما

فى كل الاحوال المدى هو { جـ }

ثانيا الدالة الخطية : د (س) = أ س + جـ مجالها هو ح و يمثلها مستقيم لا يوازى أى من المحورين ويرسم بأى ثلاث نقاط مناسبة . المدى هو ح وتكون تزايدية على المجال إذا كان أ > ٠

و تكون تناقصية إذا كانت أ < ٠

أما إذا اكان المجال [أ ، ب] ترسم الدالة بنقطتين فقط هما (أ ، د(أ)) ، (ب ، د (ب)) ويراعى ان تكون النقط مغلقة إذا كانت الفترة مغلقة و مفتوحة فى حالة الفترات المفتوحة و يعين المدى من الرسم و الإطراد كما سبق .

ثالثا دالة المقياس : د (س) = أ |س ـ ب| + جـ

يعاد تعريف الدالة على قاعدتين كما يلى د (س) =

أ (س ـ ب) + جـ عندما س ≥ ب

ـ أ (س ـ ب) + جـ عندما س < ب

وترسم كل قاعدة كأنها دالة مستقلة فى نفس الصفحة أو ترسم كالأتى نعين نقطة بدء الشعاعين وهى (ب ، جـ) ثم نرسم منها محورين متعامدين بالنقط ثم نعين نقطة على يمين نقطة البدء ونرسم شعاع ونعين نقطة أخرى علي يسار نقطة البدء ونرسم شعاع أخر .

الشكل السابق لدالة المقياس هو الشكل العام .

يكون المدى من الرسم [جـ ، ∞ [، محور التماثل س = ب إ ذا كان أ > ٠ و يكون المدى] ـ ∞ ، جـ] إذا كان أ < ٠ و يعين الاطراد من الرسم أفضل. و العكس إذا كان أ< ٠

رابعا دالة الدرجة الثانية : د (س) = أ (س ـ ب)^{٢} + جـ مجالها هو ح مالم يذكر غير ذلك .

يمثله بيانيا منحنى قطع مكافئ له نقطة الرأس (ب ، جـ) ويكون إتجاه الفرعين إلى أعلى إذا كانت أ > ٠

ويكون إتجاه الفرعين لاسفل إذا كانت أ< ٠و يعين المدى والاطراد والنوع من الرسم أفضل .

وطريقة الرسم نعين نقطة رأس المنحنى (ب ، جـ) ثم نرسم منها محورين متعامدين بالنقط ثم نعين نقطتين على يمين رأس المنحنى و نرسم الفرع الاول و نعين نقطين على اليسار ونرسم الفرع الاخر نمد الفرعين إذاكان المجال هو ح

أما إذا كانت الدالة على الصورة د (س) = أ س ^{٢}+ ب س + جـ نعين الإحداثى السينى لرأس المنحنى وهو $\frac{-ب}{٢أ}$

ثم نو جد د ($\frac{-ب}{٢أ}$) فيكون رأس المنحنى هو ($\frac{-ب}{٢أ}$ ، د ($\frac{-ب}{٢أ}$)) ثم نرسم منها محورين متعامدين بالنقط ونرسم نقطتين على يمين نقطة البدء وكذلك نقطتين على اليسار و نرسم المنحنى حسب اتجاه تعيين النقط .

خامسا الدالة التكعيبية : د (س) = أ (س ـ ب)^{٣} + جـ مجالها هو ح و يمثلها بيانيا منحنى متماثل

فى النقطة (ب ، جـ) و ترسم كالاتى نعين نقطة رأس المنحنى (ب ، جـ) و نرسم منها محورين متعامدين بالنقط ونعين نقطتين على اليمين و نقطتين على اليسار ونرسم المنحنى متصل حسب اتجاه تعيين النقط

الاطراد تزايدية إذا كان أ > ٠ و تناقصية إذا كان أ < ٠ ، المدى دائما هو ح طالما المجال كان ح .

سادسا الدالة الكسرية : د (س) = $\frac{أ}{س ـ ب}$ + جـ المجال لهذة الدالة هو ح ـ { ب } أى مجموعة الاعداد الحقيقية ما عدا أصفار دالة المقام . لرسم هذة الدالة نعين نقطة التماثل لهذة الدالة و هى (ب ، جـ) ثم نرسم منها محورين متعامدين بالنقاط ثم نعين ثلاث نقط على يمين نقطة التماثل ونرسم منحنى يمر بهم يكاد يمس المحورين ثم نعين ثلاث نقاط أخرى على يسار نقطة التماثل ونرسم منحنى يمر بهم يكاد يمس المحورين

ملاحظة (١) : نقطة التماثل مفتوحة يعنى لا تنتمى للمنحنى الذى هو عبارة عن فرعين منفصلين و متماثلين فى نقطة التماثل .

ملاحظة (٢) : إذا كانت الدلة ليست فى الصورة العامة يجب وضعها فى الصورة العامة و ذلك بقسمة البسط على المقام قسمة مطولة و توضع بالشكل (باقى القسمة على المقام) + الناتج

مثل د (س) = $\frac{٢س+ ٣}{س+ ٢}$

فيكو ن الشكل كالاتى د (س) = $\frac{- ١}{س + ٢}$ + ٢

فتكون نقطة التماثل هى (ـ ٢ ، ٢) وترسم كما يلى :

	٢
٢ س + ٣	س + ٢
(ـ) ٢ س + ٤	
ـ ١	

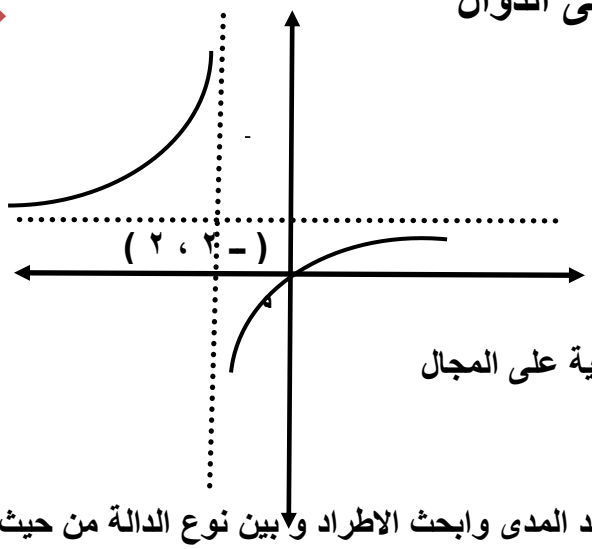
Kamal taha 0123801200

✪ أمثلة منوعة على الدوال

مثال (١) إرسم الشكل البيانى للدالة

د (س) = $\frac{-١}{س + ٢}$ + ٢ مبينا المجال أولا ثم

من الرسم أوجد المدى و أبحث الاطراد و النوع



المجال ح ـ { ـ ٢ } ، المدى ح ـ { ٢ }

نقطة التماثل (ـ ٢ ، ٢) و نوعها لا فردية ولا زوجية و هى تزايدية على المجال

ح ـ { ـ ٢ }

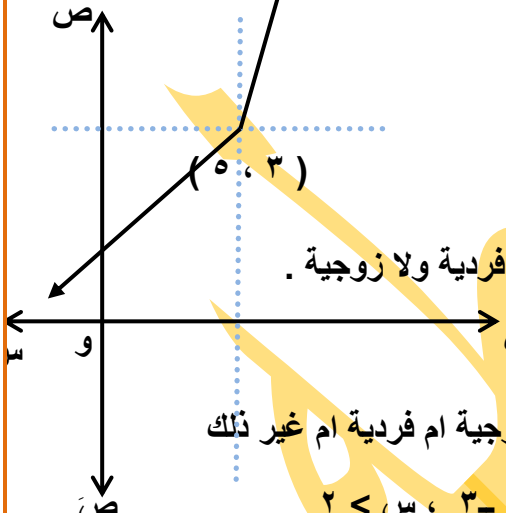
مثال (٢) إرسم الشكل البيانى للدالة و من الرسم أوجد المدى وابحث الاطراد وبين نوع الدالة من حيث كونها زوجية ام فردية ام غير ذلك

د (س) = | ٣ ـ س | + ٢س ـ ١

الحل د (س) = | س ـ ٣ | + ٢س ـ ١ =
- س ـ ٣ + ٢س ـ ١ عندما س ≤ ٣
- ـ س + ٣ + ٢س ـ ١ عندما س > ٣

د (س) =
- ٣ س ـ ٤ عندما س ≤ ٣
- س + ٢ عندما س > ٣

نعين النقطة (٣ ، ٥) و نرسم منها شعاعان الاول يمر بالنقطة (٤ ، ٨)



والثانى يمر بالنقطة (٢ ، ٤).

المدى هو ح الاطراد تزايدية فى]ـ∞ ، ٣ [وتزايدية فى [٣ ، ∞ [النوع لا فردية ولا زوجية .

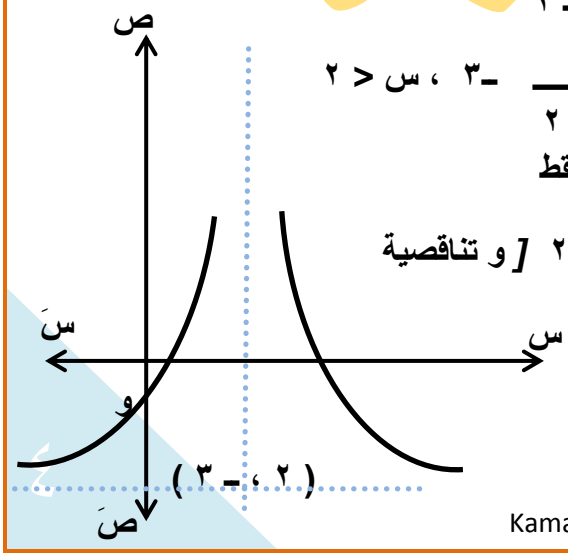
مثال (٣) إرسم الشكل البيانى للدالة

و من الرسم أوجد المدى وابحث الاطراد و بين نوع الدالة من حيث كونها زوجية ام فردية ام غير ذلك

د (س) = $\frac{١}{|س - ٢|}$ ـ ٣ الحل

فى هذه الحالة يعاد تعريف الدالة على قاعدتين د (س) =
- $\frac{١}{س - ٢}$ ـ ٣ ، س < ٢
- $\frac{-١}{س - ٢}$ ـ ٣ ، س > ٢

و ترسم بتعيين النقطة (٢ ، ـ٣) ويرسم منها محورين متعامدين بالنقط



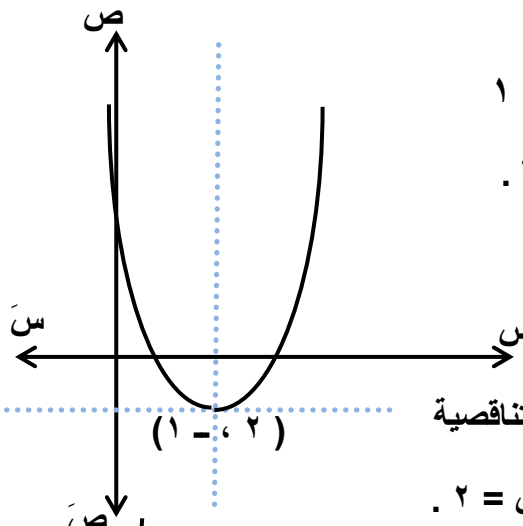
المدى] ـ ٣ ، ∞ [مسقيم التماثل س = ٢ تزايدية فى الفترة] ـ ∞، ٢ [و تناقصية

فى الفترة] ٢ ، ∞ [النوع لا فردية ولا زوجية .

مثال (٤) إرسم الشكل البيانى للدالة

$$د (س) = (٢ - س)^{٢} - ١$$

من الرسم أوجد المدى وابحث الاطراد واذكر مستقيم التماثل وبين نوعها .



الحل د (س) = (س - ٢)^{٢} - ١

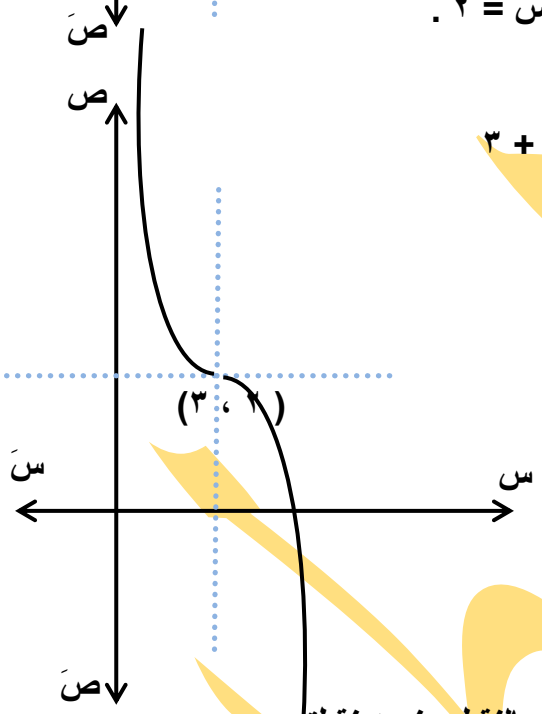
لا حظ انة تم الترتيب داخل القوس أولا حيث أن الاس عدد زوجى .

نقطة رأس المنحنى هى (٢ ، - ١) والمدى هو [- ١ ، ∞ [الإطراد تناقصية فى] - ∞ ، ٢] و تزايدية فى الفترة [٢ ، ∞ [مستقيم التماثل هو س = ٢ .

مثال (٥) إرسم الشكل البيانى للدالة

$$د (س) = (٢ - س)^{٣} + ٣$$

من الرسم أوجد المدى وابحث الاطراد .



الحل : د (س) = - (س - ٢)^{٣} + ٣ المجال هو ح

نقطة التماثل هى (٢ ، ٣)

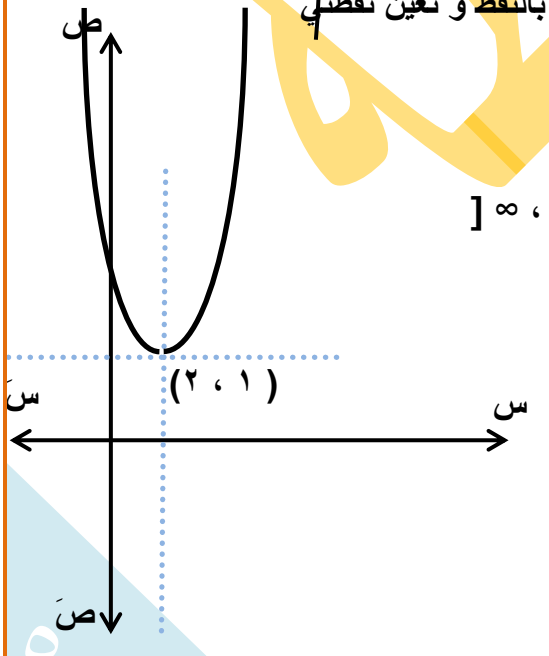
المدى هو ح الاطراد تناقصية فى ح

مثال (٦) إرسم الشكل البيانى للدالة

$$د (س) = |(س - ١)^{٣}| + ٢$$

ومن الرسم أوجد المدى و أبحث الاطراد.

الحل : نعين النقطة (١ ، ٢) ونرسم منها محورين متعامدين بالنقط و نعين نقطتي على اليمين ونقطين على اليسار



المدى [٢ ، ∞ [الاطراد تناقصية] - ∞ ، ١] و تزايدية فى [١ ، ∞ [

ثانيا الأسس و اللوغاريتمات

تذكر قوانين الأسس : إذا كان أ ، ب ∈ ح ـ { ٠ } ، م ، ن ∈ ص فإن

(١) $أ^{م} \times أ^{ن} = أ^{م+ن}$ (٢) $\frac{أ^{م}}{أ^{ن}} = أ^{م-ن}$

(٣) $أ^{م} \times ب^{م} = (أ \times ب)^{م}$ (٤) $\frac{أ^{م}}{ب^{م}} = (\frac{أ}{ب})^{م}$

(٥) $(أ^{م})^{ن} = (أ)^{م ن}$ (٦) $(أ)^{صفر} = ١$

(٧) $(أ)^{-١} = \frac{١}{أ}$ (٨) إذا كان $أ^{م} = أ^{ن}$ فإن م = ن

(٩) إذا كان $أ^{م} = ب^{م}$ فإن أ = ب أو م = صفر

تعريف الأس الكسرى

$\sqrt[ن]{(أ)^{م}} = أ^{\frac{م}{ن}}$ (أى دليل الجذر مقام للأس)

إذا كان $(أ)^{\frac{١}{ن}} = ب$ (فإن $أ = ب^{ن}$)

فى العلاقة السابقة نتخلص من الأس الكسرى برفع الطرفين لأس معكوس ضربى .

اللوغاريتمات : تعريف هام

إذا كان ص ∈ ح $^{+}$ ، أ ∈ ح $^{+}$ ـ { ١ } فإن $أ^{س} = ص$ ⟺ $لو_{أ}$ ص = س حيث س ∈ ح

❖ هذه العلاقة السابقة توضح عملية التحويل من الصورة الأسية إلى الصورة اللوغاريتمية والعكس صحيح .

اللوغاريتمات المعتادة هى اللوغاريتمات ذات الأساس ١٠ وفيها لايكتب الأساس

إذا كان $٢^{٥} = ٣٢$ فإن $لو_{٢} ٣٢ = ٥$ و إذا كان $لو_{ب} حـ = م$ فإن $ب^{م} = جـ$ حيث جـ ∈ ح $^{+}$ ، ب ∈ ح $^{+}$ ـ { ١ }

قوانين اللوغاريتمات : إذا كان س ، ص، ع ∈ ح $^{+}$ ، أ ∈ ح $^{+}$ ـ { ١ } فإن

(١) $لو_{أ}(س \times ص) = لو_{أ} س + لو_{أ} ص$ (٣) $لو_{أ}(\frac{س ص}{ع}) = لو_{أ} س + لو_{أ} ص - لو_{أ} ع$

(٢) $لو_{أ}(\frac{س}{ص}) = لو_{أ} س - لو_{أ} ص$ (٤) $لو_{أ} أ = ١$

(٥) $لو_{أ} س^{ن} = ن\ لو_{أ} س$

ملاحظه هامة : الأثبات الأتى يحفظ جيداً إثبت أن :

$لو_{ص}^{س} = \frac{لو\ س}{لو\ ص}$ الحل نفرض أن $لو_{ص}^{س} = جـ$ ومنها $ص^{جـ} = س$ ثم ناخذ لوغاريتم الطرفين للاساس ١٠ ∴ جـ لو ص = لو س ∴ $جـ = \frac{لو\ س}{لو\ ص}$

$لو_{ص}^{س} = \frac{لو\ س}{لو\ ص}$

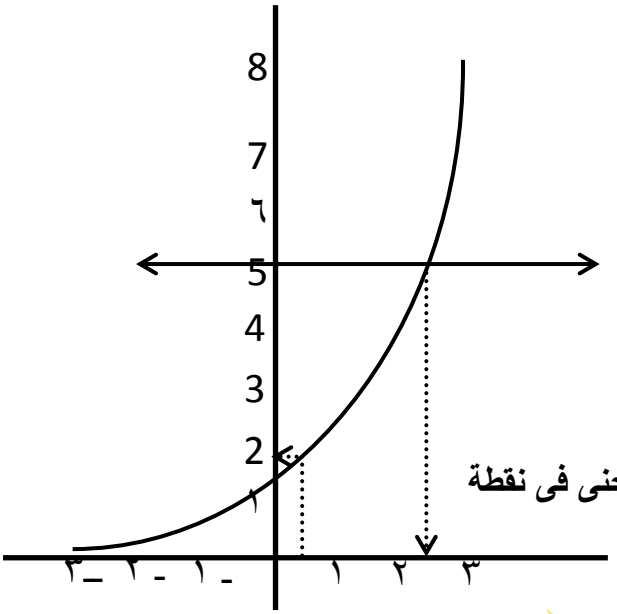
Kamal taha 0123801200

لرسم الدالة الأسية نتبع الأتى : د : ح ⟵ ح$^{+}$ اى ان المجال هو مجموعة الاعداد الحقيقية و المجال المقابل هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة ٠

د (س) = ٢^{س}

س	ـ ٣	ـ ٢	ـ ١	٠	١	٢	٣
د(س)	٨/١	٤/١	٢/١	١	٢	٤	٨

من الرسم أوجد



أولا قيمة س إذا كان د (س) = ٥

ثانيا قيمة $\sqrt[٥]{٨}$ الحل

أولا نرسم من ص = ٥ مستقيم يوازى محور السينات يقطع المنحنى فى نقطة

نسقط منها عمود على محور السينات تعطى القيمة المطلوبة ٠

قيمة س ≅ ٢،٣

ثانيا لايجاد $\sqrt[٥]{٨}$ نضع اقيمة على الصورة ٢$^{\frac{٣}{٥}}$ من س = ٦، نرسم عمود على محور السينات يقطع المنحنى فى نقطة نرسم منها عمود على محور الصادات يكون الناتج ≅ ١،٥

إذا كان مجال الدلة الاسية هو ح فإن المدى ح$^{+}$ و إذا كان الأساس > ١ تكون الدالة تزايدية على المجال

و إذا كان ٠ < الاساس < ١ تكون تناقصية

تدريب إرسم الشكل البيانى للدالة د (س) = ٢$^{|س|}$ من الرسم أوجد المدى إبحث الأطراد و بين نوع الدالة من حيث كونها زوجية أم فردية .

لرسم الدالة اللوغاريتمية : إذا كان د : ح$^{+}$ ⟵ ح أى أن مجال الدالة مجموعة الأعداد الحقبقية الموجبة و المجال المقابل هو مجموعة الأعداد الحقيقية

د (س) = لو$_{٢}$س متخذا س ∋ [$\frac{١}{٨}$ ، ٨]

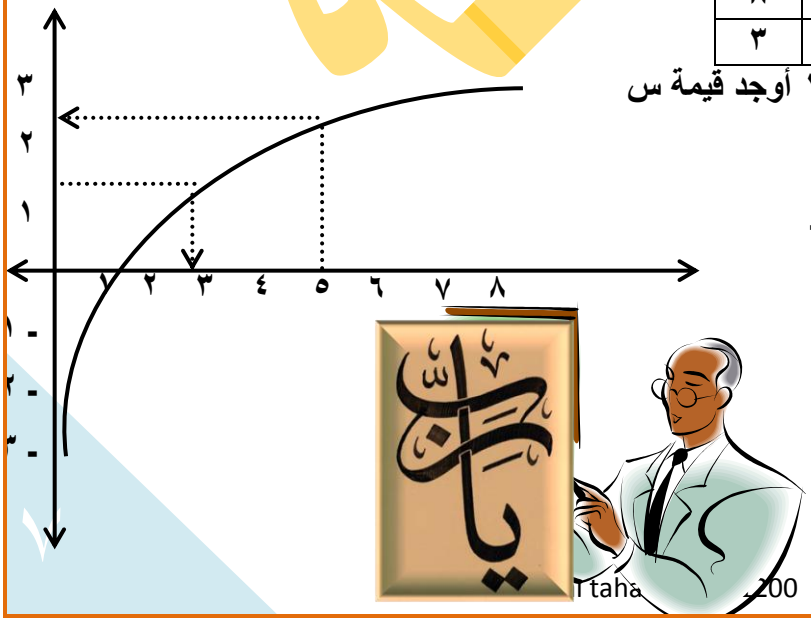
س	٨/١	٤/١	٢/١	١	٢	٤	٨
د(س)	ـ ٣	ـ ٢	ـ ١	٠	١	٢	٣

من الرسم أ وجد لو$_{٢}$ ٥ و إذا كان لو$_{٢}$ س = ١،٥ أوجد قيمة س

الحل لو$_{٢}$ ٥ ≅ ٢،٣ ثانيا س ≅ ٢،٨

لاحظ أن المدى هو ح الدالة تزايدية فى المجال ح$^{+}$

النوع لا فردية ولا زوجية ٠



أمثله على الأ سس واللوغاريتمات

(١) إذا كان د (س) = $٣^{س}$ أوجد مجموعة حل المعادلة د (س) + د (٥ ـ س) = ٣٦

(٢) إذا كان د (س) = $٢^{٣ - س}$ أوجد مجموعة حل المعادلة د (٣ ـ س) + د (س) = ٦

(٣) إذا كان د (س) = $٣^{٢س - ١}$ ، ق (س) = $٩^{س}$ أوجد قيمة س إذا كان

د (س ـ ١) + ق (س + ١) = ٧٣٢

(٤) إذا كان د (س) = لو س أوجد قيمة س إذا كان د (٢س ـ ١) + د (٢ س +١) = صفر

(٥) إذا كان د (س) = $٧^{س}$ أوجد قيمة س إذا كان د (٢س ـ ١) + د (٢س + ١) = $\frac{٥٠}{٤٩}$

(٦) أوجد قيم س إذا كان $٣^{٥س ـ ٢}$ = $٧^{س +٢}$

(٧) إ وجد قيمة س إذا كان $٢^{٢س}$ ـ ١١ × $٢^{س}$ + ٢٤ = ٠

الحل

(١) $٣^{س}$ + $٣^{٥ ـ س}$ = ٣٦ ∴ $٣^{س}$ + $\frac{٣^{٥}}{٣^{س}}$ = ٣٦ ⟸ بو ضع ص = $٣^{س}$

∴ ص + $\frac{٣^{٥}}{ص}$ = ٣٦ بالضرب فى ص ∴ $ص^{٢}$ + ٢٤٣ = ٣٦ ص ⟸ $ص^{٢}$ ـ ٣٦ ص + ٢٤٣ = ٠

(ص ـ ٩) (ص ـ ٢٧) = ٠ منها ص = ٩ أ، ص = ٢٧

$٣^{س}$ = ٩ = $٣^{٢}$ ∴ س = ٢ أ، $٣^{س}$ = ٢٧ = $٣^{٣}$ ∴ س = ٣

---

(٢) $٢^{(٣ ـ (٣ ـ س))}$ + $٢^{(٣ ـ س)}$ = ٦ ⟸ $٢^{٢س}$ + $٢^{٣ ـ س}$ = ٦ تحل كما فى المثال السابق ٠

---

(٦) بأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس ١٠ ∴ (٥ س ـ ٢) لو٣ = (س + ٢) لو٧

٥ س لو٣ ـ ٢ لو٣ = س لو٧ + ٢ لو٧ ⟸ ٥ س لو٣ ـ س لو٧ = ٢ لو٧ + ٢ لو ٣

س (٥ لو٣ ـ لو٧) = ٢ لو٧ +٢ لو٣ ⟸ س = $\frac{٢ \text{ لو}٧ + ٢ \text{ لو}٣}{٥ \text{ لو}٣ ـ \text{ لو}٧}$ = ١،٧١٦٦ تقريبا

يترك باقى المسائل للتدريب ٠

Kamal taha 0123801200

المتتابعات

أولا المتتابعة الحسابية ·

تعريف (١) تكون المتتابعة ح(ن) حسابية إذا كان كل حد فى المتتابعة يزيد عن الحد السابق له مباشرة بمقدار ثابت ≠ صفر يسم هذا المقدار الثابت بأساس المتتابعة الحسابية ونرمز لة بالرمز ء

أى أن ح (ن ـ ١) ـ ح (ن) = ء حيث ء ≠ ٠ و إذا كانت ء > ٠ تكون المتتابعة تزايدية ، إذا كانت ء < ٠ تكون المتتابعة تناقصية ٠

نظرية بدون برهان إذا كان الحد النونى فى المتتابعة مقدار من الدرجة الأولى فى ن فإن المتتابعة تكون حسابية أساسها معامل ن ٠أى على الصورة ح (ن) = ء ن + ب و لإيجاد حدها الأول نعوض عن ن بـ (١) و لإيجاد أى حد نعوض عن رتبة هذا الحد فمثلا لإيجاد الحد العاشر نضع ن = ١٠

الصورة العامة للمتتابعة الحسابية التى حدها الأول يساوى أ و أساسها يساوى ء هى و حدها الأخير ل

ح (ن) = (أ ، أ + ء ، أ + ٢ء ، أ + ٣ء ، ..... ، ل ـ ٣ء ، ل ـ ٢ء ، ل ـ ء ، ل)

الحد النونى للمتتابعة الحسابية ح (ن) = أ + (ن ـ ١) ء حيث أ هى الحد الأول ، ء هى الأساس ،

ن هى رتبة هذا الحد ، ح (ن) قيمة هذا الحد ٠

تنبيه هام قبل كل شئ لابد من معرفة الحد الأول والأساس

ملاحظات هامة

(١) لتعيين رتبة أول حد سالب نحل المتباينة ح (ن) < صفر

(٢) لتعيين رتبة أول حد موجب نحل المتباينة ح (ن) > صفر

(٣) الحدود التى تعطى اكبر مجموع للمتتابعة هى الحدود الموجبة و لمعرفة عدد الحدود الموجبة نعين رتبة أول حد سالب من حل المتباينة ح (ن) < ٠ فإذا كان أول حد سالب هو ح (١٥) مثلا فإن عدد الحدود الموجبة ١٤ ٠

(٣) الحدود التى تعطى أصغر مجموع للمتتابعة هى الحدود السالبة و لمعرفة عدد الحدود السالبة نعين رتبة أول حد موجب من حل المتباينة ح (ن) > ٠ فإذا كان أول حد موجب هو ح (١٥) مثلا فإن عدد الحدود السالبة ١٤ ٠

الوسط الحسابى

تعريف : الوسط الحسابى لعدة أعداد يساوى (مجموعهم على عددهم)

الوسط الحسابى لعددين (مجموعهم / ٢)

تعريف إذا كان أ ، ب ، جـ ثلاث أعداد فى تتابع حسابى فإن ب هى الوسط الحسابى للعدين أ ، جـ

(أى أن $ب = \frac{أ + جـ}{٢}$ ، ٢ ب = أ + جـ

Kamal taha 0123801200

قاعدة هامة : إذا أدخل عدة أوساط حسابية بين العددين أ ، ب فإنه يتكون متتابعة حسابية عدد حدودها يساوى عدد الأوساط + ٢ و يكون معلوم فيها الحد الأول و الحد الأخير و تكتب على الشكل الأتى

(أ ، أ +ء ، أ + ٢ء ، أ + ٣ ء، ..... ، ب ـ ٣ء ، ب ـ ٢ء ، ب ـ ء ، ب)

العناصر داخل المستطيل هى الأوساط الحسابية حيث الوسط الاول أ + ء ، الوسط الثانى أ + ٢ء ،.....

الوسط الاخير ب ـ ء ، الوسط قبل الأخير ب ـ ٢ء ، ....

الوسط العاشر من البداية أ + ١٠ء ، الوسط العاشر من النهاية ب ـ ١٠ ء . و هكذا

مجموع ن حدا متتالية من متتابعة حسابية

مجموع ن حدا متتالية من متتابعة حسابية يتعين من القانون

$جـ_ن = \frac{ن}{٢} [٢ أ + (ن ـ ١) ء]$ حيث ن عدد الحدود ، أ هى أول حد فى الحدود التى سوف نجمعها ، ء هى أساس المتتابعة الحسابية ٠

أو $جـ_ن = \frac{ن}{٢} [أ + ل]$ حيث أ هى أول حد فى المجموع ، ل هى آخر حد فى المجموع ٠ (وتكون أ هى أول حد فى المتتابعة إذا قيل المجموع إبتداء من الحد الأول او مجموع ن حداً الاولى)

ملاحظات هامة

(١) لإيجاد عدد الحدود التى تجعل المجموع موجباً نحل المتباينة $جـ_ن$ > صفر

(٢) لإيجاد عدد الحدود التى تجعل المجموع سالباً نحل المتباينة $جـ_ن$ < صفر

(٣) أكبر مجموع للمتتابعة الحسابية هو مجموع الحدود الموجبة و لمعرفة عددها نعين رتبة أول حد سالب ٠

(٤) أصغر مجموع للمتتابعة الحسابية هو مجموع الحدود السالبة و لمعرفة عددها نعين رتبة أول حد موجب ٠

يجب مراعاة الأتى عند الحل

لحل أى مسألة فى المتتابعة الحسابية يجب ان تكون الحدود بدلالة أ ، ء

تكوين معادلات بدلالة أ ، ء وحلها جبرياً لمعرفة الحد الاول والأساس وكتابة المتتابعة الحسابية بالصورة العامة ٠

إذا كان هناك ثلاث أعداد تكون متتابعة حسابية نفرض هذة الأعداد أ ، أ +ء ، أ + ٢ء

إذا كان هناك إرتباط بين حدود متتابعة حسابية و أى متتابعةحسابية أخرى نفرض للأولى الحد الأول والأساس أ ، ء ، نفرض للثانية الحد الأول ، الأساس بدلالة أ ، ء ٠

إذا كانت ثلاث أعداد تكون متتابعة حسابية ممكن تكوين معادلة لهم كالأتى (٢ × الحد الأوسط = مجموع الحدين الأخرين)

§ ربنا آتنا فى الدنيا حسنة و فى الآخرة حسنة و قنا عذاب النار§

ثانيا المتتابعة الهندسية :

تعريف (٢) تكون المتتابعة ح(ن) هندسية إذا كان كل حد فى المتتابعة مقسوما على الحد السابق له مباشرة = مقدار ثابت ≠ ± ١ يسمى هذا المقدار الثابت بأساس المتتابعة الهندسية ونرمز له بالرمز ر أى | ح (ن ـ ١) ÷ ح (ن) = ر | حيث ر ≠ ± ١

الصورة العامة للمتتابعة الهندسية التى حدها الأول أ ، أساسها ر ، حدها الأخير ل

ح (ن) = (أ ، أ ر ، أ ر^{٢} ، أ ر^{٣} ، ..... ، $\frac{ل}{ر^{٣}}$ ، $\frac{ل}{ر^{٢}}$ ، $\frac{ل}{ر}$ ، ل)

الحد النونى للمتتابعة الهندسية | ح (ن) = أ ر$^{ن-١}$ | حيث أ هى الحد الأول ، ر هى الأساس ، ن هى رتبة هذا الحد ، ح (ن) هى قيمة الحد .

تنبيه هام قبل كل شئ لابد من معرفة الحد الأول والأساس

يراعى الآتى :

(١) لتعيين رتبة و قيمة أول حد أكبر من عدد موجب نحل المتباينة (ح (ن) > العدد)ثم بأخذ لوغاريتم الطرفين إذا لم نستطع وضع المتباينة على صورة أساسات متحدة ثم إيجاد قيمة ن ثم التعويض فى الحد العام.

(٢) لتعيين رتبة و قيمة أول حد أصغر من عدد موجب نحل المتباينة (ح (ن) < العدد) ثم بأخذ لوغاريتم الطرفين إذا لم نستطع وضع المتباينة على صورة أساسات متحدة ثم إيجاد قيمة ن ثم التعويض فى الحد العام.

الوسط الهندسى:

تعريف (١) : الوسط الهندسى لعددين موجبين معا او سالبين معا هو ± الجذر التربيعى لحاصل ضربهما .

بمعنى إذا كان س ، ص عددين موجبين معا أو سالبين معاً فإن وسطهم الهندسى = ± $\sqrt{\text{س ص}}$ أو

(مربع الوسط الهندسى = حاصل ضرب العددين)

تعريف (٢) : إذا كان س ، ص ، ع ثلاث أعداد فى تتابع هندسى فإن ص هى الوسط الهندسى للعددين س ، ع أى (ص = ± $\sqrt{\text{س ع}}$) أو (ص^{٢} = س ع)

تعريف (٣) : إذا كان ص وسط هندسى للعددين س ، ع فإن س ، ص ، ع تكون متتابعة هندسية أيضاً ص^{٢} = س ع أو ص = ± $\sqrt{\text{س ع}}$.

العلاقة بين الوسط الحسابى والوسط الهندسى لعددين موجبين :

إذا كان أ ، ب عددين موجبين فإن وسطهم الحسابى (ع) أكبر من وسطهم الهندسى (هـ)

حيث ع = $\frac{\text{أ + ب}}{٢}$ ، هـ = ± $\sqrt{\text{أ ب}}$

∴ ع > هـ أو $\frac{\text{أ + ب}}{٢}$ > ± $\sqrt{\text{أ ب}}$ وتستخدم هذة العلاقة فى مسائل بها متباينات فى المتتابعة الحسابية و الهندسية .

§ اللهم عمر قلوبنا بالإيمان §

مجموع عدد محدود من حدود متتابعة هندسية

مجموع حدود متتابعة هندسية

$$جـ_{ن} = \frac{ل ر - أ}{ر - ١}$$

حيث أ هى أول حد فى الحدود التى نجمعها ، ل هى الحد الأخير فى الحدود التى نجمعها ، ر هى أساس المتتابعة الهندسية

$$جـ_{ن} = \frac{أ (ر^{ن} - ١)}{ر - ١}$$

حيث أ هى الحد الأول فى الحدود التى نجمعها ، ن عدد الحدود ، ر هى الأساس و تكون(أ) هى الحد الأول فى المتتابعة إذا كان المجموع إبتداء من الحد الأول ٠

تعريف تكون المتتابعة الهندسية لانهائية إذا كان ـ ١ < ر < ١ أى | ر | < ١ وفى هذه الحالة يمكن إيجاد مجموع أى عدد من حدود المتتابعة الهندسية مهما كبر (اى مجموع عدد غير منتهى من حددودها) ويكون المجموع

$$جـ_{\infty} = \frac{أ}{١ - ر}$$

حيث | ر | <١

ملاحظات هامة يجب إتباعها عند الإجابة على ورقة الأسئلة :

(١) الإعتماد على الله سبحانه و تعالى وذلك بقرآة الفاتحة وما تيسر من الأدعية و ذلك لهدوء الأعصاب ٠

(٢) قراءة ورقة الأسئلة كلها فى مدة لا تزيد عن دقيقتين

(٣) إختيار الأسئلة المطلوب الإجابه عنهم و هى السؤال الإجبارى و أى ثلاث أسئلة أنت تختارها من الأسئلة الباقية

(٤) تحديد السؤال الذى نبدأ الإجابة به و هو السؤال الذى متأكدين من إجابته بنسبة ١٠٠%

(٥) يليه السؤال الذى نسبة إجابته اقل وهكذا .... و نترك السؤال الذى يحتاج إلى تفكير إلى الآخر

(٦) يجب إجابة كل سؤال فى صفحتين متقابلتين حسب الحاجة ويكون هناك فاصل بين كل فقرة وأخرى

(٧) الأسئلة التى بها رسم بيانى يجاب عنها بورق الرسم البيانى المرفق بكراسة الإجابة مع كتابة رقم السؤال و رقم الفقرة

(٨) ممنوع إصطحاب أى متعلقات (المحمول ، براشيم ، ملخصات ، .... الخ) داخل اللجنة و عدم التحدث أو التخاطب مع زملاءك داخل اللجنة ٠

(٩) عند الأنتهاء من الإجابة على الأسئلة المطلوبة منك إبدأ فى المراجعة كالآتى

أجب عن كل سؤال مرة أخرى بالقلم الرصاص فى أحد الصفحات البيضاء و قارن إجابتك الجديدة بالإجابة السابقة إن كانت الإجابات متطابقة أمسح الإجابة التى هى بالقلم الرصاص و إن حدث إختلاف أترك كلا الإجابتين بعد إعادة تحبير الرصاص مع كتابة (حل أخر للفقرة رقم ..... فى السؤال رقم .....)

(١٠) إذا حدث شك فى إجابة فقرة معينة لا تشطب الإجابة و اتركها ثم قم بكتابة حل أخر و أكتب الحل الجديد مع بقاء الحل السابق ٠

(١١) بعد الإنتهاء من الإجابة وكان لديك وقت متبقى قم بالإجابة عن السؤال الزائد بنفس التركيز السابق .

(١٢) إصطحب معك أدواتك الشخصية مثل (قلم رصاص ، قلم جاف أزرق ، مسطرة ، آلة حاسبة ، ممحاه)

و الله الموفق

مراجعة التفاضل

أولا : نهاية دالة عند س ⟵ أ

(١) إيجاد د (أ)

إذا كان الناتج =
- كمية معينة تكون هذه الكمية هى إجابة المسألة
- كمية غير معرفة إذن لاتوجد نهاية للدالة وتكتب (∞)
- كمية غير معينة مثل ($\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ ، ∞ ـ ∞ ، ـــ ، صفر × ∞)

اذا كان الناتج كمية غير معينة يكون هناك عامل صفرى هو (س ـ أ) يجب حذفة بإحدى الوسائل الأتية :

(١) تحليل كل من البسط والمقام تحليلا كاملا

(٢) القسمة المطولة لكل من البسط والمقام على العامل الصفرى (س ـ أ)

(٣) ضرب كل من البسط والمقام فى المرافق للبسط او للمقام او لكليهما حسب الحاجة ٠

بعد حذف العامل الصفرى نوجد د (أ)

إذا لم تفلح اى من الوسائل السابقة نلجأ إلى النظرية الآتية : (٤)

$$\text{نهـــا}_{س \longrightarrow أ} \frac{س^{ن} - أ^{ن}}{س^{م} - أ^{م}} = \frac{ن}{م} أ^{ن-م}$$

وهذا لا يتحقق إلا إذا توفرت الشروط الآتية

(١) حدى البسط مثل حدى المقام مثل حدى العامل الصفرى ٠

(٢) الإشارة بين حدى البسط مثل الإشارة بين حدى المقام مثل الإشارة بين حدى العامل الصفرى ٠

(٣) أسس حدى البسط متساوية وكذلك أسس حدى المقام ٠

ثانيا : نهاية دالة عندما س ⟵ ∞

نظرية $\text{نهـــا}_{س \longrightarrow \infty} \frac{١}{س} = \text{صفر}$ ، $\text{نهـــا}_{س \longrightarrow \infty} \frac{أ}{س^{ن}} = \text{صفر}$ حيث ن > صفر

$$\text{نهـــا}_{س \longrightarrow \infty} \frac{أ}{س} = \text{صفر حيث } أ \neq \text{صفر}$$

و فيها تحل المسائل بقسمة البسط والمقام على س مرفوعة لأكبر أس فى المقام

أو بأخذ س مرفوعة لأكبر أس عامل مشترك من البسط والمقام ثم حذف العامل المشترك

Kamal taha 0123801200

بعض الملاحظات لحل المسائل للتأكيد فقط وليس للحل

(١) إذا كان درجة البسط = درجة المقام تكون الإجابة معامل أكبر درجة فى البسط على معامل أكبر درجة فى المقام

(٢) إذا كان درجة البسط أقل من درجة المقام تكون الإجابة = صفر

(٣) إذا كان درجة البسط أكبر من درجة المقام تكون الإجابة = ∞

ثالثا : نهايات الدوال المثلثية

لإيجاد نهاية أى دالة مثلثية يجب أولا التعويض فإذا كان الناتج كمية غير معينة نستخدم النظرية الآتية .

$$\text{نهـــا}_{س \leftarrow 0} \frac{\text{جا س}}{\text{س}} = ١$$

$$\text{نهـــا}_{س \leftarrow 0} \frac{\text{ظا س}}{\text{س}} = ١$$

$$\text{نهـــا}_{س \leftarrow 0} \frac{\text{جا أ س}}{\text{ب س}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}}$$

$$\text{نهـــا}_{س \leftarrow 0} \frac{\text{ظا أ س}}{\text{ب س}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}}$$

ملاحظات هامة جدا

(١) عندما س ⟵ صفر تحول ظتا س ⟵ $\frac{١}{\text{ظا س}}$ ، تحول قتا س ⟵ $\frac{١}{\text{جا س}}$

(٢) عندما س ⟵ ط تحول ظا س ⟵ ـ ظا (ط ـ س) ، تحول حا س ⟵ جا (ط ـ س)

(٣) عندما س ⟵ $\frac{\text{ط}}{٢}$ تحول ظتا س ⟵ ظا ($\frac{\text{ط}}{٢}$ ـ س) ، تحول جتا س ⟵ جا ($\frac{\text{ط}}{٢}$ ـ س)

(٤) لا تنسى تحويل جتا٢س = ١ ــ ٢جا^{٢} س

دالة التغير ، دالة متوسط التغير ، معدل التغير

عندما تتغير س من س$_{١}$ إلى س$_{١}$ + هـ فإن د (س) تتغير من د (س$_{١}$) إلى د (س$_{١}$ + هـ)

و بذلك تكون دالة التغير ت (هـ) = د (س$_{١}$ + هـ) ــ د (س$_{١}$)

و بذلك تكون دالة متوسط التغير م (هـ) = $\frac{\text{د (س}_{١}\text{ + هـ) ــ د (س}_{١}\text{)}}{\text{هـ}}$

و يكون معدل التغير $\text{نهـــا}_{\text{هـ} \leftarrow 0} \frac{\text{د (س}_{١}\text{ + هـ) ــ د (س}_{١}\text{)}}{\text{هـ}}$

و لإيجاد أى منهم نتبع الآتى بالترتيب (١) إيجاد د (س$_{١}$) ، (٢) إيجاد د(س$_{١}$ + هـ) (٣) بالطرح تحصل على دالة التغير (٤) بالقسمة على هـ تحصل على دالة متوسط التغير (٥) إيجاد النهاية عندما هـ تؤول إلى الصفر تحصل على معدل التغير .

لاحظ أن معدل التغير هو ميل المماس للمنحنى ص = د (س) .

ملاحظات (١) المستقيمان المتوازيان ميلهم متساوى (٢) المستقيمان المتعامدان حاصل ضرب ميلاهما = ـ١
(٣) لإيجاد نقط تقاطع منحنين أو مستقيمين أو مستقيم و منحنى نحل المعادلتين جبريا
(٤) لإيجاد نقط تقاطع منحنى مع محور السينات نضع ص=٠ و لإيجاد نقط تقاطع منحنى مع محور الصادات نضع س = ٠ (٥) ميل المستقيم من المعادلة الاحداثية (ــ معامل س على معامل ص)

Kamal taha 0123801200

الإشتقاق

نرمز للمشتقة الأولى بأحد الرموز الآتية د/ (س) أ، ص/ أ، $\frac{ع ص}{ع س}$ أ، $\frac{ع}{ع س}$ د (س)

(١) إذا كان د (س) = جـ (مقدار ثابت) فإن د/ (س) = صفر

(٢) إذا كان د (س) = س^{ن} فإن د/ (س) = ن س$^{ن-١}$

(٣) إذا كان د (س) = جـ س^{ن} فإن د/ (س) = جـ ن س$^{ن-١}$

(٤) إذا كان د (س) = ر (س) ± ق (س) فإن د/ (س) = ر/(س) ± ق/ (س)

(٥) إذا كان د (س) = ر(س) × ق (س) فإن د/ (س) = ر/ (س)×ق (س) + ق/ (س) × ر (س)

مشتقة حاصل ضرب دالتين = مشتقة الأولى × الثانية + مشتقة الثانية ×الأولى

(٦) إذا كان د (س) = $\frac{ر (س)}{ق (س)}$ فإن د/ (س) = $\frac{ر/ (س)× ق (س) – ق/ (س) × ر (س)}{[ق (س)]^{٢}}$

أى أن مشتقة خارج قسمة دالتين = (مشتقة البسط × المقام ــ مشتقة المقام × البسط) ÷ (المقام)^{٢}

(٧) إذا كان ص = د (ع) ، ع = ر (س) فإن $\frac{ع ص}{ع س}$ = $\frac{ع ص}{ع ع}$ × $\frac{ع ع}{ع س}$ (مشتقة دالة الدالة)

أى إذا كانت ص دالة فى ع ، ع دالة فى س فإن مشتقة ص بالنسبة إلى س = مشتقة ص بالنسبة إلى ع × مشتقة ع بالنسبة إلى س مع التعويض فى أخر خطوة عن ع بدلالة س ٠

(٨) إذا كان ص = [د (س)]^{ن} فإن $\frac{ع ص}{ع س}$ = ن [د (س)]$^{ن-١}$ × د/ (س)

أى أن مشتقة قوس أس (ن) = ن × القوس أس (ن ــ ١) × مشتقة ما بداخل القوس

(٩) إذا كان ص = جا س فإن $\frac{ع ص}{ع س}$ = جتا س

(١٠) إذا كان ص جتا س فإن $\frac{ع ص}{ع س}$ = ــ جا س

(١١) إذاكان ص = ظا س فإن $\frac{ع ص}{ع س}$ = قا^{٢} س

(١٢) إذا كان ص = جا (أ س + ب) فإن $\frac{ع ص}{ع س}$ = أ جتا (أ س + ب)

(١٣) إذا كان ص = جتا (أ س + ب) فإن $\frac{ع ص}{ع س}$ = ــ أجا (أ س + ب)

(١٤) إذا كان ص = ظا (أ س + ب) فإن $\frac{ع ص}{ع س}$ = أ قا^{٢} (أ س + ب)

أى ان مشتقة أى دالة مثلثية = مشتقة الزاوية × مشتقة الدالة المثلثية لنفس الزاوية ٠

ميل المماس للمنحنى عند أى نقطة عليه هو المشتقة الأولى للدالة عند هذه النقطة

معادلة المماس عند النقطة (س$_{١}$، ص$_{١}$) هو ص ــ ص$_{١}$ = م (س ــ س$_{١}$) حيث م هى ميل المماس

معادلة العمودى على المماس عند النقطة (س$_{١}$ ، ص$_{١}$) هو (ص ــ ص$_{١}$) = - $\frac{١}{م}$ (س ــ س$_{١}$)

ميل المستقيم الموازى لمحور السينات = ٠ ، ميل المستقيم الموازى لمحور الصادات غير معرف

ثا لثا حسا ب المثلثا ث

أولا قاعدة الجيب

مساحة سطح المثلث = $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب طول ضلعين فى جيب الزاوية المحصورة بينهما

قاعدة الجيب فى أى مثلث أ ب جـ يكون $\frac{أ'}{جا\ أ} = \frac{ب'}{جا\ ب} = \frac{جـ'}{جاجـ} = \frac{أ' + ب' + جـ'}{جا\ أ + جا\ ب + جا\ جـ} = ٢$ نق

حيث أ' ، ب' ، جـ' هى أطوال اضلاع المثلث التى تقابل الرؤوس أ ، ب ، جـ على الترتيب ، نق هى نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب جـ ٠

أ' + ب' + جـ' هى محيط المثلث ٠

تستخدم هذه القاعدة إذا علم فى المثلث قياس زاويتين و طول ضلع وتكون الخطوات أثناء الحل كالآتى

(١) إيجاد قياس الزاوية الثالثة = ١٨٠ ــ (مجموع الزاويتين الأخرتين)

(٢) كتابة قاعدة الجيب

(٣) التعويض فى قاعدة الجيب وحساب أطوال الأضلاع بدون تقريب ثم تقريبهم فى حالة مإذا طلب منك ٠

ثانيا قاعدة الجيب تمام

فى أى مثلث أ ب جـ

$أ'^{٢} = ب'^{٢} + جـ'^{٢} - ٢\ ب'\ جـ'\ جتا\ أ$ يستخدم هذا الشكل لإيجاد طول الضلع الثالث فى المثلث إذا علم طولا ضلعين وقياس زاوية محصورة بينهما ٠

$جتا\ أ = \frac{ب'^{٢} + جـ'^{٢} - أ'^{٢}}{٢\ ب'\ جـ'}$ يستخدم هذا الشكل إذا علم أطوال أضلاع المثلث الثلاثه ٠

ثالثا حل المثلث

<u>أولا إذا علم فى المثلث قياس زاويتين و طول ضلع :</u>

(١) قياس الزاويه الثالثة = ١٨٠ ــ (مجموع قياس الزاويتين الاخرتين)

(٢) إستخدام قاعدة الجيب لإيجاد أطوال الأضلاع المتبقيه فى المثلث ٠

<u>ثانيا إذا علم فى المثلث طولا ضلعين و قياس زاوية محصورة بينهما :</u>

(١) إستخدام قاعدة الجيب تمام فى شكلها الأول ($أ'^{٢} = ب'^{٢} + جـ'^{٢} - ٢\ ب'\ جـ'\ جتا\ أ$) و ذلك لإيجاد الضلع الثالث

(٢) إستخدام قاعدة الجيب تمام فى شكلها الثانى ($جتا\ أ = \frac{ب'^{٢} + جـ'^{٢} - أ'^{٢}}{٢\ ب'\ جـ'}$) وذلك لإيجاد قياس زاوية من المثلث

(٣) إيجاد قياس الزاوية الثالثة = ١٨٠ ــ (مجموع قياس الزاويتين الاخرتين)

Kamal taha 0123801200

ثالثا إذا علم فى المثلث أطوال الأضلاع الثلاثة :

(١) إستخدام قاعدة الجيب تمام فى شكلها الثانى جتا أ = $\frac{ب^{٢} + جـ^{٢} - أ^{٢}}{٢ ب جـ}$ و ذلك لإيجاد قياس زاوية أ

(٢) إستخدام قاعدة الجيب تمام فى شكلها الثانى جتا ب = $\frac{أ^{٢} + جـ^{٢} - ب^{٢}}{٢ أ جـ}$ و ذلك لإيجاد قياس زاوية ب

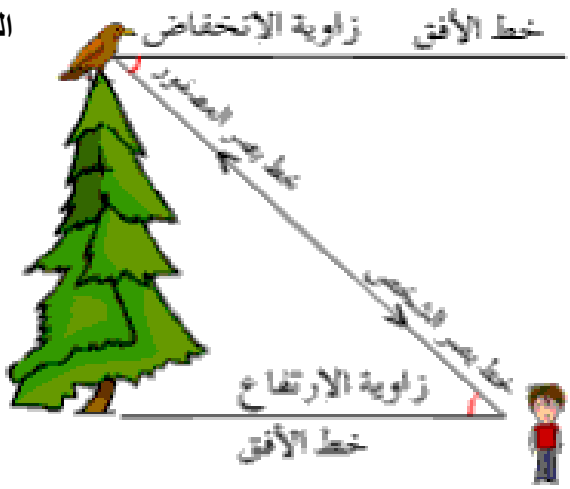
(٣) إيجاد الزاوية الثالثة فى المثلث = ١٨٠ ـ (مجموع قياس الزاويتين الاخرتين) ٠

وهناك حالة خاصة إذا علم فى المثلث طولا ضلعين و قياس زاوية غير محصورة :

(١) إستخدام قاعدة الجيب وذلك لإيجاد قياس زاوية أخرى فى المثلث مع مراعاة أنه هناك إجابتين لهذه الزاوية احدهما فى الربع الأول (هـ) و الأخرى فى الربع الثانى (١٨٠ ــ هـ) و إختبار الحل الثانى إذا كان يصلح للمثلث أم لا

(٢) إيجاد الزاوية الثالثة (٣) من قاعدة الجيب نحسب طول الضلع الثالث ٠

زوايا الأرتفاع و الإنخفاض



لحل مسائل على زوايا الأرتفاع و الإنخفاض نتبع الآتى :

(١) رسم عمود على سطح الأرض أو عمودين على سطح الأرض يمثل الاجسام المرتفعة عن سطح الارض مع مراعاة أطوال الأعمدة ٠

(٢) تحديد موضعى الراصد و المرصود يحصران زاوية الأرتفاع أو الإنخفاض مرصودان تكرر الخطوة (٢ ، ٣)

(٣) من الراصد يرسم شعاعين أحدهما أفقى و الأخر يمر بالمرصود

(٤) إذا تحرك الراصد أو المرصود أو إذاكان هناك راصدان أو

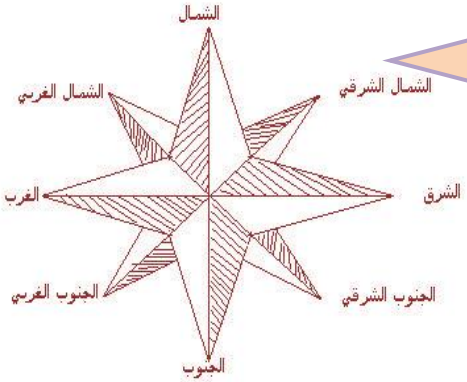
بعد الإنتهاء من الرسم يجب إيجاد جميع قياسات الزوايا الممكنة بالرسم و إ ستخدام القواعد المناسبة لحل المثلث حتى نحصل على المطلوب ٠

أحيانا يكون هناك ارتفاع فوق ارتفاع أخر مثل(قلعة فوق تل) أو(سارى علم فوق مبنى) أو(مبنى لم يكتمل بناءه) فى هذه الحالة يرسم عمود مقسم إلى جزأين الجزء العلوى هو ارتفاع الشئ العلوى والجزء السفلى هو ارتفاع الشئ السفلى ٠

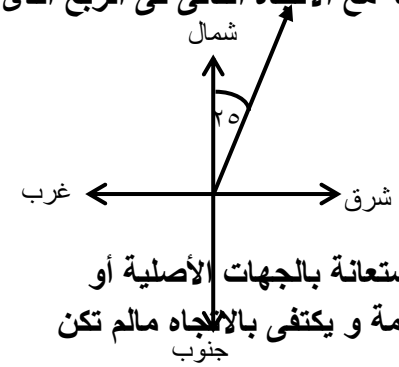
الرصد فيما سبق فى المستوى الرأسى

Kamal taha 0123801200

الجهات الأصلية و الفرعية



كما هو موضح بالشكل الجهات الأصلية والجهات الفرعية التى تصنع مع الجهتين الأصليتين زوايا متساوية و كل منها ٤٥ ° والجهات التى تنسب الى الجهات الأصلية مثل(٢٥ °شرق الشمال) نرسم الجهات الأصلية وفى الربع(شرق ، شمال) نرسم شعاع من نقطة الأصل يصنع زاوية ٢٥ ° مع الشمال أى تقاس الزاوية مع الاتجاه الثانى فى الربع الذى يحوى الاتجاهين كما هو موضح بالشكل



الرصد فى المستوى الأفقى بالجهات الأصلية ٠

فى مثل تلك الحالات يرسم من الراصد الجهات الأصلية ثم نعين إتجاه المرصود بالاستعانة بالجهات الأصلية أو الفرعية أو منتسبا إليها ثم تحدد المسافة على هذا الاتجاه إذا كان هناك مسافة معلومة و يكتفى بالاتجاه مالم تكن المسافة محددة

إذا علمت السرعة والزمن لجسم متحرك فإن المسافة المقطوعة = السرعة × الزمن ٠

الدوال المثلثية لمجموع وفرق قياسى زاويتين

إذا كان س ، ص هما قياسى زاويتين فإن :

جتا (س ـ ص) = جتا س جتا ص + جا س جا ص

جتا (س + ص) = حتا س جتا ص ـ جا س جا ص

جا (س ـ ص) = جا س جتا ص ـ جتا س جا ص

جا (س + ص) = جا س جتا ص + جتا س جا ص

$$\text{ظا}(س - ص) = \frac{\text{ظا س} - \text{ظا ص}}{١ + \text{ظا س ظا ص}} \qquad \text{ظا}(س + ص) = \frac{\text{ظا س} + \text{ظا ص}}{١ - \text{ظا س ظا ص}}$$

بعض العلاقات الهامة

جا (٩٠ـ س) = جتا س	جتا (٩٠ـ س) = جا س	ظا (٩٠ ـ س) = ظتا س
قتا (٩٠ ـ س) = قا س	قا (٩٠ ـ س) = قتا س	ظتا (٩٠ ـ س) = ظا س

جا (٩٠ + س) = جتا س	حتا (٩٠ + س) = ـ جا س	ظا (٩٠ + س) = ـ ظتا س
قتا (٩٠+ س) = قا س	قا (٩٠ + س) = ـ قتا س	ظتا (٩٠ + س) = ـ ظا س

Kamal taha 01238012000

جا (١٨٠ ـ س) = جا س	جتا (١٨٠ ـ س) = ـ جتا س	ظا (١٨٠ ـ س) = ـ ظا س
قتا (١٨٠ ـ س) = قتا س	قا (١٨٠ ـ س) = ـ قا س	ظتا (١٨٠ ـ س) = ـ ظتا س
جا (١٨٠ + س) = ـ جا س	جتا (١٨٠ + س) = ـ جتا س	ظا (١٨٠ + س) = ظا س
قتا (١٨٠+ س) = ـ قتا س	قا (١٨٠ + س) = ـ قا س	ظتا (١٨٠ + س) = ظتا س
جا (٢٧٠ ـ س) = ـ جتا س	جتا (٢٧٠ ـ س) = ـ حا س	ظا (٢٧٠ ـ س) = ظتا س
قتا (٢٧٠ ـ س) = ـ قا س	قا (٢٧٠ ـ س) = ـ قتا س	ظتا (٢٧٠ ـ س) = ظا س
جا (٢٧٠ + س) = ـ جتا س	جتا (٢٧٠ + س) = حا س	ظا (٢٧٠ + س) = ـ ظتا س
قتا (٢٧٠+ س) = ـ قا س	قا (٢٧٠ + س) = قتا س	ظتا (٢٧٠ + س) = ـ ظا س
جا (٣٦٠ ـ س) = ـ جاس	جتا (٣٦٠ ـ س) = جتا س	ظا (٣٦٠ ـ س) = ـ ظا س
قتا (٣٦٠ ـ س) = ـ قتا س	قا (٣٦٠ ـ س) = قا س	ظتا (٣٦٠ ـ س) = ـ ظتا س

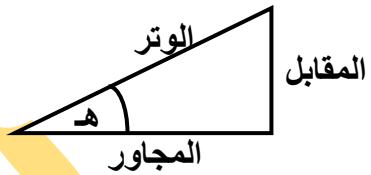
لإيجاد الدوال المثلثية لأى زاوية :

(١) نرسم زاوية حادة فى مثلث قائم

(٢) نكل أطوال أضلاع المثلث من نظرية فيثاغورث

(٣) نضع إشارات الدوال المثلثية حسب الربع المحدد لها

(٤) نوجد الدوال المثلثية كالآتى



$$\text{جا هـ} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} \qquad \text{جتا هـ} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} \qquad \text{ظا هـ} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

$$\text{قتا هـ} = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}} \qquad \text{قاهـ} = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}} \qquad \text{ظتا هـ} = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}}$$

الدوال المثلثية لضعف قياس الزاوية

إذا كان هـ هو قياس زاوية ما فإن ضعف قياس الزاوية هو ٢هـ وبكون الدوال المثلثية لضعف قياس الزاوية هو :

جا ٢هـ = ٢ جا هـ جتا هـ

جتا ٢ هـ = جتا^{٢}هـ ـ جا^{٢} هـ

جتا ٢هـ = ٢جتا^{٢}هـ ـ ١

جتا٢هـ = ١ ـ ٢جا^{٢}هـ

$$\text{ظا٢هـ} = \frac{\text{٢ ظاهـ}}{\text{١ ـ ظا}^{٢}\text{هـ}}$$

جا س = ٢جا $\frac{\text{س}}{٢}$ جتا $\frac{\text{س}}{٢}$

جتا س = جتا^{٢} $\frac{\text{س}}{٢}$ ـ جا^{٢} $\frac{\text{س}}{٢}$

جتا س = ٢ جتا^{٢} $\frac{\text{س}}{٢}$ ـ ١

جتا س = ١ ـ ٢ جا^{٢} $\frac{\text{س}}{٢}$

$$\text{ظا س} = \frac{\text{٢ ظا } \frac{\text{س}}{٢}}{\text{١ ـ ظا}^{٢} \frac{\text{س}}{٢}}$$