الجبر والهندسة الفراغية

أجب عن الأسئلة التالية:

(١) $\left(\frac{١}{١ + \omega ت} - \frac{ت + \omega}{١ + \omega^{٢} ت}\right)^{٨} = ...$

أ) ٤ ب) ٨ ج) ١٦ د) ٦٤

(٢) $هـ^{\pi ت} - هـ^{- \pi ت} = ...$

أ) −٢ ب) صفر ج) ١ د) ٢

(٣) قيمة المقدار: ${}^{٤٧}ق_{٤} + \sum_{ر = ١}^{٥} {}^{٥٢ - ر}ق_{٣} = ...$

أ) ${}^{٥٢}ق_{٥}$ ب) ${}^{٤٧}ق_{٥}$ ج) ${}^{٥٢}ق_{٣}$ د) ${}^{٥٢}ق_{٤}$

(٤) متجه الوحدة العمودي على كل من المتجهين:

$٤ \overleftarrow{س} - \overleftarrow{ص} + ٣ \overleftarrow{ع}$ ، $-٢ \overleftarrow{س} + \overleftarrow{ص} - ٢ \overleftarrow{ع}$ هو ....

أ) $\frac{١}{٣}(\overleftarrow{س} - ٢ \overleftarrow{ص} + ٢ \overleftarrow{ع})$ ب) $\frac{١}{٣}(- \overleftarrow{س} + ٢ \overleftarrow{ص} + ٢ \overleftarrow{ع})$

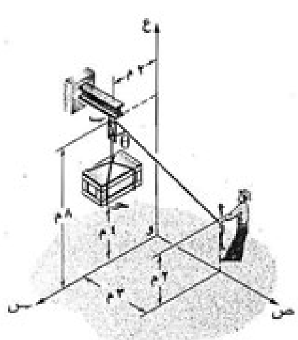
ج) $\frac{١}{٣}(٢ \overleftarrow{س} + \overleftarrow{ص} + ٢ \overleftarrow{ع})$ د) $\frac{١}{٣}(٢ \overleftarrow{س} - ٢ \overleftarrow{ص} + ٢ \overleftarrow{ع})$

(٥) أوجد معادلة المستوى المار بخط تقاطع المستويين:

$٢س - ٣ص + ع - ٤ = ٠$ ، $س - ص + ع + ١ = ٠$

عمودياً على المستوى: $س + ٢ص - ٣ع + ٦ = ٠$

(٦) في الشكل المقابل:



إذا كانت ج هي نقطة تقاطع قطري قاعدة الصندوق.

أجب عن أحد المطلوبين التاليين فقط:

أ) أوجد قياس الزاوية المحصورة بين $\overleftarrow{\text{ب أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب ج}}$

ب) أوجد معادلة المستوى المار بالنقاط أ، ب، ج

(٧) إذا كان الحد الأوسط في مفكوك $\left(\frac{\text{أ}^{٢}}{٣} + \frac{\text{ب}}{\text{أ}^{٢}}\right)^{\text{٨ ن}}$ هو الحد التاسع

فإن: ن= ....

أ) ١ ب) ٢ ج) ٣ د) ٤

(٨) يجب على الطالب أن يجيب عن ١٠ أسئلة من ١١ سؤالاً بشرط ان يجيب عن أربع أسئلة على الأقل من الأسئلة الخمسة الأولى، كم طريقة يمكن بها أن يجيب الطالب؟

أ) ١٤٠ ب) ١٩٦ ج) ٢٨٠ د) ٣٤٦

(٩) إذا كان: $\overleftarrow{\text{أ}}$ = (٣، −٢، م) وكان $\|\overleftarrow{\text{أ}}\| = \sqrt{٢٢}$ فإن: م = ...

أ) ± ٣ ب) ± ٩ ج) ٢١ د) ١٧

(١٠) يوجد للنظام: $\begin{pmatrix} ٢ & ٢ & ٣ \\ ١ & -٢ & -٣ \\ ٤ & -٢ & -٣ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \boxed{}$

أ) الحل البديهي فقط.

ب) عدد لا نهائي من الحلول بينها الحل الصفري.

ج) عدد لا نهائي من الحلول عدا الحل الصفري.

د) لا يوجد حل على الإطلاق.

(١١) أوجد قياس الزاوية بين المستقيم: $\overleftarrow{\text{ر}}$ = (١، ٢، −١) + ك (١، −١، ١)

والمستوى $\overleftarrow{\text{ر}}$. (٢، −١، ١) = ٤

، 3س $-$ 5ص $+$ 2ع $= 13$ ثم استخدم المعكوس الضربي للمصفوفة في إيجاد الحل إن وجد.

(١٩) أجب عن أحد السؤالين التاليين فقط:

أ) إذا كان: $ع_1 = 1 - \sqrt{3}$ ت، $ع_2 = 1 +$ ت حيث $ت^2 = -1$

فأوجد العدد: $ع = \frac{ع_1}{ع_2}$ في الصورة الأسية ثم أثبت أن $ع^{12}$ عدد حقيقي.

ب) ضع العدد $2\sqrt{2}$ ($1 +$ ت) على الصورة المثلثية ثم أوجد جذوره التربيعية على الصورة الأسية.

نموذج الإجابة للجبر والهندسة الفراغية

(١) (جـ) (٢) (ب) (٣) (د) (٤) (ب)

(٥) $\because$ المستوى س $+ 2$ص $- 3$ع $+ 6 = 0$ عمودياً على المستوى المطلوب.

$\therefore$ المتجه (1، 2، -3) يوازي المستوى المطلوب

، $\because$ متجه اتجاه خط التقاطع $= \begin{vmatrix} \overleftarrow{س} & \overleftarrow{ص} & \overleftarrow{ع} \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2\overleftarrow{س} - \overleftarrow{ص} + \overleftarrow{ع}$

$\therefore$ المتجه (-2، -1، 1) يوازي المستوى المطلوب أيضاً.

$\therefore$ متجه الاتجاه العمودي على المستوى المطلوب. $\begin{vmatrix} \overleftarrow{س} & \overleftarrow{ص} & \overleftarrow{ع} \\ 1 & 2 & -3 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

$= -\overleftarrow{س} + 5\overleftarrow{ص} + 3\overleftarrow{ع}$

، بوضع س $= 0$ في معادلتي المستويين.

∴ ٣ص − ع = −٤ ، ص − ع = ١ وبحل المعادلتين معاً.

∴ ص = −٢,٥ ، ع = −٣,٥

∴ النقطة (٠، −٢,٥، −٣,٥) تقع على خط التقاطع.

∴ النقطة (٠، −٢,٥، −٣,٥) تقع على المستوى المطلوب.

∴ معادلة المستوى المطلوب هي:

$\overleftarrow{ر}$. (−١، ٥، ٣) = (٠، −٢,٥، −٣,٥) . (−١، ٥، ٣)

∴ −س + ٥ص + ٣ع + ٢٣ = ٠

(٦)

أ) إحداثيات النقطة أ (٠، ٣، ٢)، إحداثيات النقطة ب (٢، ٠، ٨)

، إحداثيات النقطة جـ (٢، ٠، ٤)

∴ $\overleftarrow{ب أ}$ = (−٢، ٣، −٦)، $\overleftarrow{ب جـ}$ = (٠، ٠، ٤)

$$جتا\ \theta = \frac{(-٢، ٣، -٦)\ (٠، ٠، -٤)}{\sqrt{٤ + ٩ + ٣٦}\ \sqrt{(-٤)^٢}} = \frac{٦}{٧}$$

∴ $\theta \simeq ٣١^\circ$

ب) أ (٠، ٣، ٢) ، ب (٢، ٠، ٨) ، جـ (٢، ٠، ٤)

∴ $\overleftarrow{أ ب}$ = (٢، −٣، ٦) ، $\overleftarrow{أ جـ}$ = (٢، −٣، ٢)

، ∵ $\frac{٢}{٢} = \frac{-٣}{-٣} \neq \frac{٦}{٣}$ ∴ $\overleftarrow{أ ب}$ لا يوازي $\overleftarrow{أ جـ}$

∴ متجه الاتجاه العمودي على المستوى المار بالنقاط أ، ب، جـ

$$= \overleftarrow{أ ب} \times \overleftarrow{أ جـ} = \begin{vmatrix} \overleftarrow{س} & \overleftarrow{ص} & \overleftarrow{ع} \\ ٢ & -٣ & ٦ \\ ٢ & -٣ & ٢ \end{vmatrix} = ١٢\ \overleftarrow{س} + ٨\ \overleftarrow{ص}$$

∴ المتجه ٣ $\overleftarrow{\text{س}}$ + ٢ $\overleftarrow{\text{ص}}$ متجه اتجاه عمودي على المستوى، النقطة أ (٠، ٣، ٢) تقع عليه ∴ معادلة المستوى هي:

$\overleftarrow{\text{ر}}$. (٣، ٢، ٠) = (٠، ٣، ٢). (٣، ٢، ٠) أي أن: ٣س + ٢ص − ٦ = ٠

(٧) (ب) (٨) (ب) (٩) (أ) (١٠) (ب)

(١١)

∵ متجه اتجاه المستقيم المعطى هو (١، −١، ١)، متجه اتجاه العمودي على المستوى العمودي على المستوى هو (٢، −١، ١)

∴ قياس الزاوية بين المستقيم والمستوى = ٩٠° − θ

حيث جتا θ = $\dfrac{\left|(١، −١، ١) . (٢، −١، ١)\right|}{\sqrt{١+١+١}\ \sqrt{١+١+٤}}$ ∴ θ ≃ ٢٨ َ ١٩°

∴ قياس الزاوية بين المستقيم والمستوى = ٣٢ َ ٧٠°

(١٢) (ج) (١٣) (د) (١٤) (ج) (١٥) (د)

(١٦)

بفرض أن الحد الخالي من س هو $\text{ح}_{\text{ر}+١}$

∴ $\text{ح}_{\text{ر}+١} = {}^{٦}\text{ق}_{\text{ر}}\ (\text{س})^{(٦-\text{ر})\text{ك}} \left(\dfrac{١}{\text{س}}\right)^{\text{ر}} = {}^{٦}\text{ق}_{\text{ر}}\ \text{س}^{٦\text{ك}-\text{ر}\text{ك}-\text{ر}}$ بمساواة الأس = ٠

∴ ك (٦ − ر) = ر ∴ ك = $\dfrac{\text{ر}}{٦-\text{ر}}$

، ∵ ك عدد صحيح موجب ∴ ر = ٣، ٤، ٥

∴ ك = ١، ٢، ٥

الحد الخالي من س لأكبر قيم ك هو $\text{ح}_{٦} = {}^{٦}\text{ق}_{٥}$

، معامل الحد الأوسط $(\text{ح}_{\text{٤}}) = {}^{\text{٦}}\text{ق}_{\text{٣}}$

$\therefore$ النسبة المطلوبة $= \dfrac{{}^{\text{٦}}\text{ق}_{\text{٥}}}{{}^{\text{٦}}\text{ق}_{\text{٣}}} = \dfrac{\underline{|\text{٦}}}{\underline{|\text{٥}}\ \underline{|\text{١}}} \times \dfrac{\underline{|\text{٣}}\ \underline{|\text{٣}}}{\underline{|\text{٦}}} = \dfrac{\text{٣}}{\text{١٠}}$

(١٧)

$$\because \begin{vmatrix} \text{ص}+\text{ع} & \text{س} & \text{س} \\ \text{ص} & \text{ع}+\text{س} & \text{ص} \\ \text{ع} & \text{ع} & \text{س}+\text{ص} \end{vmatrix}$$

"بإجراء ص$_{\text{١}}$ − ص$_{\text{٣}}$"

$$= \begin{vmatrix} \text{ص} & \text{س}-\text{ع} & -\text{ص} \\ \text{ص} & \text{ع}+\text{س} & \text{ص} \\ \text{ع} & \text{ع} & \text{س}+\text{ص} \end{vmatrix}$$

"بإجراء ص$_{\text{١}}$ + ص$_{\text{٢}}$"

$$\begin{vmatrix} \text{٢ ص} & \text{٢ س} & \text{٠} \\ \text{ص} & \text{ع}+\text{س} & \text{ص} \\ \text{ع} & \text{ع} & \text{س}+\text{ص} \end{vmatrix} = \text{٢} \begin{vmatrix} \text{ص} & \text{س} & \text{٠} \\ \text{ص} & \text{ع}+\text{س} & \text{ص} \\ \text{ع} & \text{ع} & \text{س}+\text{ص} \end{vmatrix}$$

"بإجراء ص$_{\text{٢}}$ − ص$_{\text{١}}$"

$$= \text{٢} \begin{vmatrix} \text{ص} & \text{س} & \text{٠} \\ \text{٠} & \text{ع} & \text{ص} \\ \text{ع} & \text{ع} & \text{س}+\text{ص} \end{vmatrix}$$

"بإجراء ص$_{\text{٣}}$ − ص$_{\text{٢}}$"

المعادلة المصفوفية:

$$\therefore \left|\text{أ}\right| = \begin{vmatrix} ٢ & -١ & -٣ \\ ١ & ٢ & ١ \\ ٣ & -٥ & ٢ \end{vmatrix} = ٥٠ \neq ٠$$

$\therefore$ ر(أ) = ٣

$$\because (\text{أ}^*) = \left(\begin{array}{ccc|c} ٢ & -١ & -٣ & ٢ \\ ١ & ٢ & ١ & ١ \\ ٣ & -٥ & ٢ & ١٣ \end{array}\right)$$

$\therefore$ ر(أ) = ر (أ*) = عدد المجاهيل.

$\therefore$ نظام المعادلات له حل وحيد.

$$\text{،} \because \text{أ}^{\text{مل}} = \begin{pmatrix} ٩ & ١ & -١١ \\ ١٧ & ١٣ & ٧ \\ ٥ & -٥ & ٥ \end{pmatrix}^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} ٩ & ١٧ & ٥ \\ ١ & ١٣ & -٥ \\ -١١ & ٧ & ٥ \end{pmatrix}$$

$$\therefore \text{أ}^{-١} = \frac{١}{|\text{أ}|}\text{أ}^{\text{مل}} = \frac{١}{٥٠}\begin{pmatrix} ٩ & ١٧ & ٥ \\ ١ & ١٣ & -٥ \\ -١١ & ٧ & ٥ \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \frac{١}{٥٠}\begin{pmatrix} ٩ & ١٧ & ٥ \\ ١ & ١٣ & -٥ \\ -١١ & ٧ & ٥ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٢ \\ ١ \\ ١٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ \\ -١ \\ ١ \end{pmatrix}$$

$\therefore$ س = ٢ ، ص = −١ ، ع = ١

(١٩)

أ) $\because$ ع$_١$ = ١ − $\sqrt{٣}$ ت $\qquad$ $\therefore$ ل = $\sqrt{(١)^٢ + (-\sqrt{٣})^٢} = ٢$

، $\because$ س > ٠ ، ص < ٠ $\qquad$ $\therefore$ θ تقع في الربع الرابع.

$$\therefore \theta \text{ ظا}^{-١}\left(\frac{-\sqrt{٣}}{١}\right) = -٦٠^\circ = \frac{-\pi}{٣}$$

∴ $ع_1 = 2 هـ^{\frac{-\pi}{3} ت}$ ، ∵ $ع_2 = 1 + ت$

∴ $ل = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$

، ∵ س > ٠ ، ص > ٠ ∴ θ تقع في الربع الأول.

∴ $\theta = ظا^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) = 45° = \frac{\pi}{4}$ ∴ $ع_2 = \sqrt{2}\, هـ^{\frac{\pi}{4} ت}$

∴ $ع = \frac{ع_1}{ع_2} = \frac{2\, هـ^{\frac{-\pi}{3} ت}}{\sqrt{2}\, هـ^{\frac{\pi}{4} ت}} = \sqrt{2}\, هـ^{-\frac{7}{12}\pi ت}$

∴ $ع^{12} = (\sqrt{2})^{12}\, هـ^{-7\pi ت} = 64\, هـ^{\pi ت}$

$= 64$ (جتا π + ت جا π) $= -64$ = عدد حقيقي.

ب) ∵ $ع = 2\sqrt{2}\,(1 + ت) = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\,ت$

∴ $ل = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2} = 4$

، ∵ س > ٠ ، ص > ٠ ∴ θ تقع في الربع الأول.

∴ $\theta = ظا^{-1}\left(\frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right) = 45° = \frac{\pi}{4}$

∴ $ع = 4\left(جتا\frac{\pi}{4} + ت\, جا\frac{\pi}{4}\right) = 4\, هـ^{\frac{\pi}{4} ت}$ ، الجذر التربيعي للعدد

$ع = 2\, هـ^{\left(\frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi ر}{2}\right) ت}$ حيث ر = ١,٠ عند ر = ١

∴ الجذر التربيعي الثاني $= 2\, هـ^{\frac{9}{8}\pi ت} = 2\, هـ^{-\frac{7}{8}\pi ت}$

عند ر = صفر الجذر التربيعي الأول $= 2\, هـ^{\frac{1}{8}\pi ت}$