أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين

$\text{ص} = ٤ - \text{س}^{٢}$ ، $\text{ص} = \text{س} + ٢$

$٤ - \text{س}^{٢} = \text{س} + ٢$

$\text{س}^{٢} + \text{س} - ٢ = ٠$

$(\text{س} - ١)(\text{س} + ٢) = ٠$

$\text{س} = ١$ ، $\text{س} = -٢$

$\therefore$ المساحة $= \int_{-٢}^{١} (٤ - \text{س}^{٢} - \text{س} - ٢) \, د\text{س}$

$= \int_{-٢}^{١} (٢ - \text{س}^{٢} - \text{س}) \, د\text{س}$

$= \left[ ٢\text{س} - \frac{١}{٣}\text{س}^{٣} - \frac{١}{٢}\text{س}^{٢} \right]_{-٢}^{١}$

$= \frac{٩}{٢} = ٤,٥$ وحدة مربعة

① إذا كان $س = ٢ن^٣ - ٥ن^٢ + ٣٦ن + ١$ ، $ص = ن^٢ - ٨ن + ١١$

فإن هذا المنحنى له مماس رأسي عندما ن =

(أ) ٤   (ب) ٣ أو ٢   (ج) ٦   (د) ٨

---

② إذا كانت د دالة بحيث $د'(س) = -٢س + ٦$

فإن جميع العبارات الآتية صحيحة ماعدا ــــــ

---

③ إذا كانت $ص = أ س^{ب}$ حيث أ، ب ثابتان فإن $\frac{1}{ص}\frac{دص}{دس}$ =

$\frac{ب}{س}$   $\frac{دس}{دص}$

---

④ أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى $ص = س^٢ + ٢$ ، ومحور السينات والمستقيمين $س = -٢$ ، $س = ٢$ دورة كاملة حول محور السينات

---

⑤ $\lim_{س \to ٠} \frac{٢ - ٣}{٣س} =$

---

⑥ إذا كان $د(س) = \frac{أ - لو_{هـ} س}{س}$ حيث أ ثابت وكان للمنحنى الدالة نقطة حرجة عندما س = هـ فإن أ =

---

⑦ قطعة معدنية على شكل قطاع دائري مساحته ٤ سم^٢ أوجد طول نصف قطر ~~المنحنى~~ دائرة القطاع الذي يجعل محيطه أقل ما يمكن وما قياس زاويته عندئذ

---

⑧ أوجد مساحة المنطقة المحصورة $ص = ٤ - س^٢$ والمستقيم $ص = س$

---

⑨ إذا كان $ص = أ^{ب^س}$ حيث أ، ب ∈ $ح^+$ ، أ ≠ ب فإن $\frac{دص}{دس} =$

---

⑩ إذا كان $\int_{١}^{٣} د(س)\, دس = ١٢$ ، $\int_{٥}^{٣} د(س)\, دس = ١٦$

فإن $\int_{١}^{٥} د(س)\, دس =$ ........

---

⑪ أجب عن

(أ) $\int س^٣ (س^٢ + ١)^٦ \, دس$

(ب) $\int ظا θ \, دθ$

* أجب عن إحدى الفقرتين

* $\int (\text{س} - ٣)\, \text{هـ}^{٢\text{س}}\, \text{ء س}$

| تفاضل | تكامل |
| --- | --- |
| $\text{س} - ٣$ | $\text{هـ}^{٢\text{س}}$ |
| $١$ | $\frac{١}{٢}\text{هـ}^{٢\text{س}}$ |
| صفر | $\frac{١}{٤}\text{هـ}^{٢\text{س}}$ |

الحل

$= \frac{١}{٢}(\text{س} - ٣)\, \text{هـ}^{٢\text{س}} - \frac{١}{٤}\text{هـ}^{٢\text{س}} + \text{ث}$

---

* $\int \text{س}^{٣} (\text{س}^{٢} + ١)^{٦}\, \text{ء س}$

الحل

نفرض أن $\text{ع} = \text{س}^{٢} + ١ \Leftarrow$

$\text{س}^{٢} = \text{ع} - ١$

$٢\text{س}\, \text{ء س} = \text{ء ع}$

$\therefore \frac{١}{٢}\int \text{س}^{٢} (\text{س}^{٢} + ١)^{٦} \cdot ٢\text{س}\, \text{ء س}$

$= \frac{١}{٢}\int (\text{ع} - ١)\, \text{ع}^{٦}\, \text{ء ع} = \frac{١}{٢}\int (\text{ع}^{٧} - \text{ع}^{٦})\, \text{ء س}$

$= \frac{١}{٢}\left[\frac{\text{ع}^{٨}}{٨} - \frac{\text{ع}^{٧}}{٧}\right] + \text{ث} = \frac{١}{١٦}(\text{س}^{٢} + ١)^{٨} - \frac{١}{١٤}(\text{س}^{٢} + ١)^{٧} + \text{ث}$

---

* إذا كان $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^{٣} - ٣\text{س} - ٢$ أوجد القيم العظمى والصغرى المحلية

الحل

$\text{دَ}(\text{س}) = ٣\text{س}^{٢} - ٣ = \text{صفر}$ ومنها $\text{س} = \pm ١$

عندما $\text{س} = ١$ الدالة لها قيمة صغرى محلية $= -٤$

عندما $\text{س} = -١$ " " " عظمى محلية = صفر

---

* إذا كان $\text{ص} = \text{أ}\,\text{س}^{\text{ب}}$ حيث أ، ب ثابتان

اثبت أن $\frac{١}{\text{ص}} \frac{\text{ء ص}}{\text{ء ن}} = \frac{\text{ب}}{\text{س}} \cdot \frac{\text{ء س}}{\text{ء ن}}$

الحل بالاشتقاق بالنسبة للزمن $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء ن}} = \text{أ ب}\,\text{س}^{\text{ب}-١} \cdot \frac{\text{ء س}}{\text{ء ن}}$

بالقسمة على ص للطرفين

$\therefore \frac{١}{\text{ص}} \frac{\text{ء ص}}{\text{ء ن}} = \frac{\text{أ ب}\,\text{س}^{\text{ب}-١}}{\text{أ}\,\text{س}^{\text{ب}}} \cdot \frac{\text{ء س}}{\text{ء ن}}$

$\therefore \frac{١}{\text{ص}} \frac{\text{ء ص}}{\text{ء ن}} = \frac{\text{ب}}{\text{س}} \cdot \frac{\text{ء س}}{\text{ء ن}}$

⊛ إذا كان جاص + جتا٢س = صفر
أثبت أن $\frac{ء^2ص}{ءس^2} - \left(\frac{ءص}{ءس}\right)^2$ ظاص = ٤ جتا٢س قاص

(الحل)

بالاشتقاق بالنسبة لـ س ⇐ جتاص $\frac{ءص}{ءس}$ − ٢جا٢س = صفر

بالاشتقاق مرة أخرى ⇐ جتاص $\frac{ء^2ص}{ءس^2}$ − جاص $\frac{ءص}{ءس} \times \frac{ءص}{ءس}$ − ٤ جتا٢س = صفر

بالقسمة على جتاص

∴ $\frac{ء^2ص}{ءس^2}$ − ظاص $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)^2$ = ٤ جتا٢س قاص وهو المطلوب

---

⊛ قطعة معدنية على شكل قطاع دائري مساحته ٤ سم²
أوجد طول نصف قطر دائرة القطاع الذي يجعل محيطه أقل ما يمكن
وما قياس زاويته حينئذ؟

(الحل) نفرض أن نصف قطر دائرته س، طول القوس ص

∴ م = $\frac{1}{2}$ س ص = ٤ ∴ ص = $\frac{8}{س}$

ح المحيط = ٢س + ص = ٢س + $\frac{8}{س}$

∴ ح′ = ٢ − $\frac{8}{س^2}$ = صفر ⟵ منها س = ±٢

ح″ = $\frac{16}{س^3}$ عندما س = ٢ ∴ ح″ > صفر لها قيمة صغرى عند س = ٢

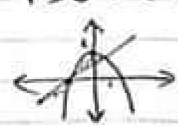
∴ طول نق = ٢، طول القوس = $\frac{8}{2}$ = ٤ ∴ $هـ^د = \frac{ص}{س} = \frac{4}{2} = 2^د$

---

⊛ أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين ص₁ = ٤ − س²، ص₂ = س + ٢

(الحل) بحل المعادلتين ٤ − س² = س + ٢

س² + س − ٢ = صفر ⟵ منها س = −٢، س = ١



∴ المساحة = $\int_{-2}^{1}$ (ص₁ − ص₂) ءس

= $\int_{-2}^{1}$ (٤ − س² − س − ٢) ءس

= $\int_{-2}^{1}$ (−س² − س + ٢) ءس = $\frac{9}{2}$ وحدة مربعة

---

⊛ أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى ص = س² + ٢
والمستقيمات س = −٢، س = ٢ دورة كاملة حول محور السينات

(الحل) الحجم = π $\int_{-2}^{2}$ ص² ءس = π $\int_{-2}^{2}$ (س² + ٢)² ءس = π $\int_{-2}^{2}$ (س⁴ + ٤س² + ٤) ءس

= $\frac{752}{15}$ π وحدة مكعبة

م/ أحمد النزيلي

## اختر الإجابة الصحيحة :-

١) إذا كان $أ^{ص} = ب^{س}$ حيث أ ، ب ثابتان فإن $\frac{دص}{دس} = \frac{لو_{هـ} ب}{لو_{هـ} أ}$

الحل: بأخذ لو للطرفين ص $لو_{هـ} أ$ = س $لو_{هـ} ب$ بالاشتقاق $\frac{دص}{دس} لو_{هـ} أ = لو_{هـ} ب$ بالقسمة

---

٢) $\int ظا θ \,.\, د θ = \text{.......} = - لو|جتا θ| + ث$

الحل: $- \int \frac{-جا θ}{جتا θ} \,.\, د θ = - لو|جتا θ| + ث$

---

٣) $\int_{-٢}^{٣} د(س) = ١٢$ ، $\int_{-٢}^{٠} د(س) = ١٦$ فإن $\int_{٣}^{٠} د(س) = ١٦ - ١٢ = ٤$

---

٤) $\int_{-π}^{π} \frac{٢س - جا س}{س^{٤} + جتا س} = \text{.......} = صفر$ لأن الدالة فردية

---

٥) $دَ(س) = س \,.\, د(س)$ ، $د(٣) = -٥$ فإن $دً(٣) = \text{.......}$

الحل: $دَ(س) = س \,.\, د(س)$ ∴ $دَ(٣) = ٣ \times -٥ = -١٥$

بالاشتقاق ∴ $دً(س) = س \,.\, دَ(س) + د(س)$ ومنها $دً(٣) = ٣ \times -١٥ - ٥$

---

٦) إذا كان د دالة حيث $دَ(س) = -٢س + ٦$

فإن جميع العبارات صحيحة ما عدا: منحنى الدالة ليس له نقطة انقلاب

---

٧) $\lim_{س \to ٠} \frac{٢^{س} - ١}{٣س} = \frac{١}{٣} لو_{هـ} ٢$

---

٨) إذا كانت $د(س) = أ - لو_{هـ} س$ لها نقطة حرجة عندما س = هـ

فإن أ = ....... الحل: $دَ(س) = \frac{-١}{س}$ غير معرفة عندما س = صفر

---

* أوجد معادلة المماس والعمودي للمنحنى س = قا θ ، ص = ظا θ ، $θ = \frac{π}{٦}$

الحل: $\frac{دس}{دθ} = قا θ ظا θ$ ، $\frac{دص}{دθ} = قا^{٢} θ$ ∴ $\frac{دص}{دس} = قتا θ$

ومنها ∴ ميل المماس = ٢ ، ميل العمودي = $-\frac{١}{٢}$ ، النقطة $\left(\frac{٢\sqrt{٣}}{٣} ، \frac{\sqrt{٣}}{٣}\right)$

∴ معادلة المماس $٢س - ص - \sqrt{٣} = صفر$

، معادلة العمودي $٣س + ٦ص - ٤\sqrt{٣} = صفر$

قطعة معدنية على شكل قطاع دائري مساحته ٤ سم²..

م. القطاع = ½ ل نق

½ ل نق = ٤

ل نق = ٨

ل = ٨/نق

المحيط = ٢ نق + ل

ح = ٢ نق + ٨/نق

دح/دنق = ٢ + ‎−٨/نق²‎      دح/دنق = صفر

٢ + ‎−٨/نق²‎ = ٠

٨/نق² = ٢      ٢نق² = ٨      نق² = ٤

نق = ٢      ل = ٨/٢ = ٤

هـ = ل/نق = ٤/٢ = ٢ ء

قياس الزاوية بالقياس الستيني = ٣٣″ ٣٣′ ١١٤°

د(س) = س$^{٣}$ − ٣س − ٢

دَ(س) = ٣س$^{٢}$ − ٣

دَ(س) = صفر

٣س$^{٢}$ − ٣ = ٠

٣س$^{٢}$ = ٣

س$^{٢}$ = ١

س = ± ١

د(١) = ١ − ٣ − ٢ = − ٤

د(−١) = −١ − ٣ × −١ − ٢ = −١ + ٣ − ٢ = صفر

عند س = −١ قيمة عظمى محلية مقدارها صفر

عند س = ١ قيمة صغرى محلية مقدارها −٤

دً(س) = ٦س

٦س = ٠ س = ٠ ص = −٢

∴ نقطة الانقلاب هي (٠، −٢)